EUCLIDES

TIJDSCHRIFT
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

32[E] JAARGANG 1956/57
VI — 1 MAART 1957

INHOUD

ERVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-DJAKARTA

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.
Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.
Opgaven voor de „kalender" aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

INTUITIONISME EN REKENKUNDE [1])

door

Dr. B. VAN ROOTSELAAR

De rekenkunde geeft, intuitionistisch doordacht, wel het minst aanleiding tot uiterlijke wijzigingen. Hoewel de relaties in de rekenkunde voor de intuitionist weinig verschillen van die voor de mathematicus, zijn er andere dingen, die voor beiden zeer verschillend zijn en dat zijn de *objecten* der rekenkunde. Ik wil daarom eerst de verschillen tussen de objecten der intuitionistische rekenkunde en die van de klassieke rekenkunde nagaan om tenslotte nog kort enige relaties in de rekenkunde te bespreken. De objecten die we gaan beschrijven zijn ten eerste de natuurlijke getallen — waarna de gehele — en rationale getallen volgens klassiek procédé klaarliggen — en ten tweede de reële getallen.

1. Natuurlijke getallen. ([1], p. 3—5; [3], p. 1—3, p. 13—15). Van onze objecten verlangen we, dat we ze kunnen opbouwen uit primitieve gedachtenobjecten en primitieve samenstellingsprocessen. Zogenaamde getalscheppers bouwen we op uit de volgende elementen:

I a. het denken van eenheden.
b. het samenstellen van eenheden (tot nieuwe eenheden).
c. het vasthouden door het geheugen van geconstrueerde eenheden (a, b).
d. het voortdurend voortzetten van b.
e. het afbreken van b.

a, b, c, d leveren ons de „aftelbaar oneindige rij" der getalscheppers, a, b, c, e leveren ons zogenaamde eindige getalscheppers (representanten van natuurlijke getallen).
Bij de vorming van een getalschepper moeten we na elke samenstelling kunnen beslissen tussen opnieuw samenstellen en afbreken. Door het paren van de geconstrueerde eenheden van twee getalscheppers krijgen we een gelijkheid, die reflexief, symmetrisch en transitief is en dus klassevorming toestaat. Deze klassen noemen we

[1]) Voordracht gehouden op 27 augustus 1956 tijdens de „Vakantiecursus 1956" van het Mathematisch Centrum.

natuurlijke getallen. We voeren de klassevorming niet uit, maar werken verder met getalscheppers, die we evenwel gemakshalve natuurlijke getallen noemen.

Het boven gedefinieerde natuurlijke getal bergt in zich begrippen van eindigheid en constructiviteit, welke tezamen met het begrip van vrije voortzetting nieuwe begrippen van constructiviteit leveren. Men verkrijgt nu een rekenkunde van natuurlijke getallen door definities te geven van optelling en vermenigvuldiging. Van de verhouding tot de klassieke rekenkunde kan men zich een beeld vormen door te onderzoeken of de axioma's van Peano voor ons systeem gelden. Welnu men kan de juistheid van deze axioma's bewijzen. Hiertoe moeten we ons echter wel even beraden over wat we in dit stadium als bewijs zullen accepteren.

Als primitieve elementen van een bewijs zullen we aannemen

II a': het vaststellen van feiten
b': het trekken van primitieve conclusies
c':, d':, e': } Respectievelijk als c, d, e, echter uitgedrukt in a' en b'.

Het bewijs van een eigenschap voor een eindig natuurlijk getal zal zijn een rij geleverd door a', b', c', e'. Het bewijs van een eigenschap E voor alle natuurlijke getallen zal zijn een rij geleverd door a', b', c', d' met $E(1), E(2), \ldots$ als deelrij van eindige getalscheppers

De axioma's van Peano volgen triviaal:
1. $1 \in N$; 2. bij elke $n \in N$ een $n' \in N$; 3. als $n \in N$ dan $n' \neq 1$; 4. als $n' = m' \in N$, dan $n = m \in N$; 5. als $E(1)$ en $E(n) \rightarrow E(n')$ voor elke $n \in N$, dan $E(n)$ voor elke $n \in N$. Het bewijs van 5. is de rij opgebouwd uit de constateringen $E(n)$ en de gegeven — dus primitieve — conclusies $E(n) \rightarrow E(n')$.

Dat de objecten der intuitionistische rekenkunde niet dezelfde zijn als die van de klassieke rekenkunde, ziet men aan het volgende voorbeeld, waarin een klassiek natuurlijk getal gedefinieerd wordt:

$$\textit{Def. } 1\colon\ n = \begin{cases} 17 \text{ als in de decimale ontwikkeling van } \pi \text{ een rij} \\ 012\ldots 9 \text{ voorkomt} \\ 19 \text{ als zo'n rij niet voorkomt.} \end{cases}$$

Hiermede is geen intuitionistisch natuurlijk getal opgebouwd, daar in de opbouw een punt komt waar we niet kunnen beslissen tussen samenstellen en afbreken.

Nu het volgende object van rekenkunde.

2. Reële getallen. ([3], p. 16—21, p. 32—36).

We definiëren een reëel getal door middel van Cauchy-rijen van rationale getallen (getalscheppers). We zullen een gelijkheidsrelatie invoeren voor Cauchy-rijen, welke weer klassevorming toelaat, maar de klassevorming, als bij de natuurlijke getallen, achterwege laten, dus weer met representanten blijven werken.

Def. 2: Een Cauchy-rij is een oneindige rij rationale getallen $a = \{a_n\}$, zodat bij elk natuurlijk getal n een natuurlijk getal $k(n)$ bepaald kan worden, zodat voor alle p geldt: $|a_{k(n)+p} - a_{k(n)}| < n^{-1}$.

Def. 3: Twee Cauchy-rijen $a = \{a_n\}$ en $b = \{b_n\}$ heten gelijk ($a = b$) indien bij elke n een $k(n)$ bepaald kan worden, zodat voor alle p: $|a_{k(n)+p} - b_{k(n)+p}| < n^{-1}$.

Def. 4: Indien twee Cauchy-rijen onmogelijk gelijk kunnen zijn, noemen we ze ongelijk.

Het kan voorkomen, dat twee Cauchy-rijen ongelijk zijn, zonder dat we in staat zijn op constructieve wijze een verschil aan te wijzen. Indien twee Cauchy-rijen een aanwijsbaar verschil hebben, zeggen we dat ze van elkaar verwijderd zijn en we omschrijven deze situatie precies als volgt:

Def. 5: a heet verwijderd van b indien een n en een k bepaald kunnen worden, zodat voor alle p geldt: $|a_{k+p} - b_{k+p}| > n^{-1}$.

Nu is in de definitie van Cauchy-rijen nog iets op te helderen, dat van zeer groot belang is.

Bij de natuurlijke getallen hebben we verlangd, dat ze opgebouwd konden worden en nu bij de Cauchy-rijen spreken we onmiddellijk van oneindige rijen, zonder dat we ons er om bekommeren hoe die tot stand komen, terwijl toch de kans om ze verkeerd tot stand te brengen — d.w.z. niet naar de zin der intuitionisten — groter is dan bij de natuurlijke getallen. Dit is weinig consequent en moet daarom eerst in orde worden gemaakt.

Het volgende is betere taal: Een oneindige rij van rationale getallen is een rij van voortdurende opvolgende constructies van rationale getallen. De vraag is nu echter: Hoe kan ik een Cauchy-rij opbouwen? D.w.z. op welke wijze kan ik, na een eindig beginsegment geconstrueerd te hebben, volgende getallen construeren, zodat ze aan de Cauchy-voorwaarden voldoen? Hiertoe moet men de Cauchy-voorwaarden primair stellen.

Laten we eens een voorbeeld nemen: Ik vraag me af hoe ik Cauchy-rijen $a = \{a_n\}$ kan maken, zodat voor alle p geldt: $|a_{n+p} - a_n| < n^{-1}$ (dus $k(n) = n$ voor alle n; def. 2). Dat gaat zo:

III 1. Kies een eerste term a_1.

2. Om aan de Cauchy-voorwaarden te voldoen moet a_2 zo gekozen worden dat $| a_2 - a_1 | < 1$. Dit is de enige eis. Ik kan nu opvolgend voor elk rationaal getal beslissen of het aan deze ongelijkheid voldoet of niet (door substitutie), d.w.z. of het gekozen mag worden als tweede element van mijn te maken Cauchy-rij of niet.

3. Voor a_3 krijg ik de volgende voorwaarden:

$$| a_3 - a_1 | < 1 \text{ en } | a_3 - a_2 | < \tfrac{1}{2}.$$

We kunnen weer voor elk rationaal getal bepalen of het in aanmerking komt of niet.

Zo voortgaande kan ik Cauchy-rijen opbouwen.

We kunnen opmerken dat onze ongelijkheden:

IV 1. in elk geval één oplossing toelaten (nl. $a_i = a_1$ voor alle i. Dit is zelfs zo voor willekeurige $k(n)$!)

2. zelfs zeer veel oplossingen toelaten

3. een volledige beschrijving van alle oplossingen toelaten.

We zien in, dat het systeem der oplossingen afhangt van de functie k: $n \rightarrow k(n)$, (in bovenstaand voorbeeld van „ident.": $n \rightarrow n$), d.w.z. door de functie $k : n \rightarrow k(n)$ zijn de mogelijke Cauchy-rijen bepaald (zie IV, 3).

Nu waren Cauchy-rijen bedoeld om reële getallen te maken en wel om een continuum te krijgen, d.w.z. toch iets meer dan de rationale getallen. De vraag die nu opkomt is deze: Welke functies $k : n \rightarrow k(n)$ zijn in staat het continuum voort te brengen (dus wezenlijk iets meer dan de rationale getallen)? Dat niet alle functies dat kunnen is gemakkelijk in te zien; b.v. een constante functie: $k : n \rightarrow 1$ kan dat niet. Kies nl. een rationale a_1. Nu moet a_2 voldoen aan $| a_1 - a_2 | < n^{-1}$ voor alle n, d.w.z. $a_2 = a_1$, enz. De enige reële getallen, die we zo kunnen maken, zijn de rijen $(a_1, a_1, \ldots)$. Daar a_1 rationaal is krijgen we in wezen de rationale getallen terug. [1]) Er zijn functies, die niet precies de rationale getallen geven, maar waarvan men toch niet kan zeggen, dat ze iets meer geven. Om het continuum voort te brengen is nodig dat men een Cauchy-rij kan aangeven, die verwijderd is van elk rationaal getal. Bovengenoemde functie „ident" : $n \rightarrow n$ staat dit toe. Het is mogelijk o.a. de klasse van functies $k : n \rightarrow k(n)$ te karakteriseren, waarvan de Cauchy-

---

[1]) En wel als niet-finiete spreiding.

rijen het continuum representeren. Het zou ons echter te ver voeren hierop nader in te gaan. [1])

We zullen nu nog nagaan welke rol de verwijderingsrelatie speelt in het systeem der reële getallen.

3. Rekenkunde. ([3], p. 49—50).
De klassieke reële getallen vormen een commutatief lichaam, d.w.z. een systeem met twee operaties: „$+$" en „$\times$", [2]) een gelijkheidsrelatie „$=$" (en haar negatie „$\neq$"), terwijl de volgende regels gelden:

V A1. $a + b = b + a$; A2. $(a + b) + c = a + (b + c)$; A3. $a + x = b$ oplosbaar voor alle a en b.
B1. $ab = ba$; B2. $(ab)c = a\,(bc)$, B3. $ax = b$ oplosbaar voor alle $a \neq 0$ en alle b; terwijl er minstens een $a \neq 0$ aanwezig wordt geacht.
C1. $a(b + c) = ab + ac$.

Onderzoeken we het systeem der intuitionistische reële getallen, dan zien we dat de axioma's A1, 2, 3, B1, 2 en C1 gelden, doch dat B3 niet geldt: het feit dat a niet gelijk is aan nul is niet voldoende om een oplossing van $ax = b$ te construeren. Men kan wel een oplossing aangeven indien a aanwijsbaar verschilt van nul. Wil men een lichaam intuitionistisch karakteriseren, dan zal men dus de aanwezigheid van een verwijderingsrelatie moeten eisen. Deze relatie zal moeten voldoen aan de eisen:

VI 1. Als $a \# b$, dan $b \# a$
2. Als $a \# b$, dan onmogelijk $a = b$
3. Als onmogelijk $a \# b$, dan $a = b$
4. Als $a \# b$, dan voor elke c zeker een van de relaties $c \# a$ en $c \# b$ te beslissen.

Deze eisen houden echter nog niet rekening met de rekenkundige structuur van het lichaam. Men moet nog eisen, dat de relatie invariant is t.o.v. de groepoperaties in het lichaam, d.w.z.

5. Als $a \# b$, dan voor alle c: $a + c \# b + c$
6. Als $a \# b$, dan voor alle $c \# 0$: $ac \# bc$
6a. Als $a \# 0$, dan $a^{-1} \# 0$.

---

[1]) Men kan het bovenstaande los zien van een continuum-intuitie en zekere equivalentieklassen van functies bepalen. (Vergelijk b.v. [2], p. 2.) Men kan vervolgens eenvoudig inzien, dat een gesloten lijnsegment voorgesteld kan worden als een finiete spreiding. Voor een soorgelijke kwestie zie [4].

[2]) Voor $a \times b$ zullen we in het volgende ab schrijven.

Voor de gelijkheidsrelatie volgt de invariantie t.o.v. optelling en vermenigvuldiging uit de axioma's onder A en B en dan volgen voor de ongelijkheidsrelatie (klassiek althans) de axioma's analoog aan VI 1—6a uit de definitie (nl. als negatie van de gelijkheidsrelatie), overigens niet alle op intuitionistisch toelaatbare wijze (IV, 4).

LITERATUUR

1. L. E. J. BROUWER: Over de grondslagen der wiskunde. (Maas & v. Suchtelen, Amsterdam, 1907).
2. L. E. J. BROUWER: Points and spaces. (Canadian Journ. Math. **6** (1954), 1—17)-
3. A. HEYTING: Intuitionism, an introduction. (Noord-Hollandsche U.M., Amsterdam, 1956).
4. B. v. ROOTSELAAR: Generating schemes for full mappings. (Indagationes Mathematicae **17** (1955), 557—563).

HET WISKUNDE-ONDERWIJS IN DE UNESCO

De 19de Internationale onderwijsconferentie te Genève (juli 1956), waar Nederland vertegenwoordigd was door de inspecteurs Goote en Van Dam, nam aan de „Recommandation no. 43 aux Ministères de l'instruction publique, concernant l'Enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires". Voor de tekst hiervan verwijzen wij naar de verschillende weekbladen.

BOEKBESPREKING

Paul Lorentz, *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik.* S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1955, 134 blz., prijs DM 15.30.

Dit boek behandelt enige fundamentele begrippen uit de statistiek: verschillende soorten grafische voorstellingen, modus, mediaan en gemiddelde, spreiding, correlatiecoëfficiënt en regressielijn. De uiteenzetting is uitermate helder, waardoor men het boek zeer gemakkelijk leest. De schrijver heeft er prijs op gesteld de betekenis van de verschillende begrippen aanschouwelijk duidelijk te maken, zodat men aan de hand van grafieken ziet, wat het essentiële van een door definitie of afleiding verkregen formule is. De resultaten worden op mathematisch juiste wijze verkregen en numerisch toegepast op goedgekozen voorbeelden uit de praktijk. Voor ieder, die beginonderwijs in de statistiek geeft of een duidelijker inzicht wil verkrijgen in de statistische grondbegrippen, zou ik dit boek ten zeerste willen aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

MODERNE OPVATTINGEN VAN OPPERVLAKTE EN INHOUD [1])

Prof. Dr A. C. ZAANEN

Bijna iedereen, ook een niet-wiskundige, weet of meent min of meer intuïtief wel te weten wat er bedoeld wordt met de oppervlakte van een (begrensde) figuur in het platte vlak of de inhoud van een (begrensd) gedeelte van de driedimensionale ruimte. Wie ook maar enigszins met de differentiaal- en integraalrekening kennis gemaakt heeft, is er echter al mee bekend dat de zaak niet zo eenvoudig ligt, en dat de genoemde begrippen samenhangen met het integraalbegrip. Wanneer het gaat om de oppervlakte van een gekromd stuk oppervlak in de driedimensionale ruimte, krijgt men zelfs al met een tamelijk ingewikkelde integraal te maken. Het is de bedoeling van deze voordracht om enige (niet alle) moderne aspecten van deze begrippen te belichten.

Tot aan het einde der vorige eeuw hebben ook de wiskundigen zich tevreden gesteld met een tamelijk begrensde opvatting; de figuren, waaraan een oppervlakte of inhoud toegekend werd, mochten van niet te pathologische aard zijn. Wiskundig uitgedrukt: de theorie van de Riemannse integraal moest toepasbaar zijn.

Om nu de uitbreiding te bespreken, die aan E. Borel (1898) te danken is, voeren we even een algemenere terminologie in. Inplaats van „figuur" zullen we „puntverzameling" zeggen, en de begrippen „oppervlakte", „inhoud" (en ook „lengte" bij een ééndimensionale puntverzameling) worden samengevat tot het begrip „*maat*". De eisen, die men nu in eerste opzet aan de maat van een puntverzameling stelt, zijn de volgende:

(a) De lege puntverzameling (d.w.z. de puntverzameling, die geen enkel punt bevat) heeft de maat nul, en de maat van een willekeurige puntverzameling is niet-negatief.

(b) Wanneer men een eindig aantal puntverzamelingen $A_1, \ldots, A_n$ heeft, die twee aan twee geen punt gemeen hebben (men zegt wel: die onderling disjunct zijn), dan is de maat van $(A_1 + \ldots + A_n)$

[1]) Voordracht gehouden op 28 augustus 1956 tijdens de „Vakantiecursus 1956" van het Mathematisch Centrum.

gelijk aan de som der maten van A_1 t.e.m. A_n (het zal duidelijk zijn welke verzameling bedoeld is met $A_1 + \ldots + A_n$). We willen dus dat de maat *additief* is.

(c) Congruente puntverzamelingen hebben dezelfde maat.

Wanneer men de theorie uit wil breiden tot puntverzamelingen in algemenere ruimten, waar geen congruentiebegrip bestaat, stelt eis (c) niets meer voor. We zullen die eis dus direct laten vervallen. Verder is het duidelijk dat door de eisen (a) en (b) de maat hoogstens op een constante factor na bepaald is; men moet dus zeker voor bepaalde eenvoudige puntverzamelingen de maat van tevoren vastleggen (in het platte vlak bijv. voor rechthoeken met zijden evenwijdig aan de coordinaatassen).

Het nieuwe in de opzet van Borel was nu dat hij (b) door een strengere eis verving, n.l.

(b′) Wanneer men een oneindige rij puntverzamelingen A_1, $A_2, \ldots$ heeft, die onderling disjunct zijn, dan is de maat van $(A_1+A_2+\ldots)$ gelijk aan de som der maten van $A_1, A_2, \ldots$ Als we de maat van de puntverzameling A door $\mu(A)$ voorstellen, dan luidt deze eis dus: Als $A_1, A_2, \ldots$ onderling disjunct zijn, dan is $\mu(\sum_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \mu(A_n)$. We beperken ons hier niet tot begrensde verzamelingen, dus het is toegelaten dat de maat van een puntverzameling de waarde $+\infty$ aanneemt; linkerlid en rechterlid in de laatste formule kunnen dus $+\infty$ zijn. Volgens deze eis (b′) moet de maat dus *σ-additief* zijn (men zegt ook wel: volledig additief).

Enige jaren na Borel is de maattheorie door H. Lebesgue (1902) op iets andere wijze opgezet, en ook iets uitgebreid. Bovendien heeft Lebesgue toen op de basis van deze maattheorie zijn integratietheorie opgebouwd. We zullen de opzet van de maattheorie van Lebesgue, voor het geval van puntverzamelingen in het platte vlak, kort weergeven:

We gaan uit van naar links half open intervallen van de vorm $(a, b; c, d]$ (d.w.z. de verzameling van alle punten (x, y), waarvoor $a < x \leqq b$, $c < y \leqq d$). Zo'n half open interval zullen we een *cel* noemen (Lebesgue zelf, en anderen na hem, werkte met open of gesloten intervallen, maar cellen hebben het voordeel dat zij zo netjes aaneensluiten; bij aan elkaar grenzende open (resp. gesloten) intervallen behoort het gemeenschappelijke randstuk tot geen van beide (resp. tot beide), en dit geeft complicaties). We stellen nu eerst bij definitie vast wat we onder de maat $\mu(A)$ van zo'n cel $A = (a, b; c, d]$ zullen verstaan. We definieren $\mu(A) = (b-a)(d-c)$. De lege puntverzameling noemen we ook een cel (notatie ϕ), en bij definitie is $\mu(\phi) = 0$. Deze maat, voorlopig dus alleen voor

cellen gedefinieerd, voldoet klaarblijkelijk aan eis (a), en met behulp van de stelling van Heine-Borel kan men bewijzen dat aan de eis van σ-additiviteit ook voldaan is.

Laat nu S een willekeurige puntverzameling in het platte vlak zijn. Het is dan altijd (en zelfs op vele manieren) mogelijk S te bedekken met behulp van een rij onderling disjuncte cellen A_1, $A_2, \ldots$. We beschouwen nu $\sum_1^\infty \mu(A_n)$ voor alle mogelijke bedekkingen van dit type, en van al deze getallen $\sum_1^\infty \mu(A_n)$ nemen we de onderste grens. Het is intuitief redelijk om deze onderste grens nu de maat van de verzameling S te noemen; om redenen, die dadelijk genoemd zullen worden, heet deze onderste grens echter de *uitwendige maat* van S. Op deze manier wordt aan elke puntverzameling S in het platte vlak dus een uitwendige maat toegekend. Helaas (of misschien niet) blijkt deze uitwendige maat wel aan eis (a) te voldoen, maar niet aan de eis van σ-additiviteit. Het is mogelijk, b.v. in de cel $A = (0, 1; 0, 1]$, een puntverzameling S aan te geven met uitwendige maat 1, zó dat het overschot $A - S$ ook de uitwendige maat 1 heeft, terwijl toch de uitwendige maat (d.w.z. de maat) van de gehele cel ook slechts 1 bedraagt. Het eerste voorbeeld van zo'n pathologische puntverzameling S werd aangegeven door G. Vitali (1905). Uit de collectie van alle puntverzamelingen in het platte vlak moet dus een zo groot mogelijke deelcollectie gelicht worden (de deelcollectie der zogenaamde *meetbare* verzamelingen), zo dat op deze deelcollectie de maat wel σ-additief is. Op een hier niet nader aan te geven wijze gelukt dit (de handigste manier om dit te doen is afkomstig van C. Carathéodory (1914)), en het is een gelukkige omstandigheid dat deze deelcollectie toch wel zo groot is dat zij bijv. alle open en gesloten puntverzamelingen in het platte vlak bevat, en ook alle eindige of aftelbare puntverzamelingen. Bovendien heeft elke verzameling, die uit slechts één punt bestaat, de maat nul, zodat in verband met de σ-additiviteit ook elke eindige of aftelbare puntverzameling de maat nul heeft. Bij zulke meetbare verzamelingen spreekt men nu weer gewoon van de maat (inplaats van de uitwendige maat), en de in dit voorbeeld besproken maat heet de *Lebesguese maat*.

De volgende uitbreiding ligt nu voor de hand, als men aan het geval van een massaverdeling (weer in het platte vlak) denkt. De bedoelde massa kan ten dele uitgesmeerd zijn, en ten dele optreden in de vorm van puntmassa's. Als A weer een cel is, en $\mu(A)$ is nu de totale „op A aanwezige" massa, dan noemen we $\mu(A)$ de maat van de cel A (in het geval dat er geen puntmassa's zijn, en dat de massadichtheid van de uitgesmeerde massa constant gelijk aan 1 is,

krijgen we de Lebesguese maat terug). Men kan deze fysische situatie wiskundig axiomatiseren, en aldus een maat, voorlopig alleen voor de cellen, beschouwen, die algemener is dan de Lebesguese maat (merk op dat hier in 't algemeen al niet meer geldt dat congruente cellen dezelfde maat hebben). Uitgaande van de maat op de collectie der cellen, kan men dan het reeds besproken uitbreidingsproces weer toepassen, en zo via een uitwendige maat weer tot de maat op de collectie der meetbare verzamelingen komen. Zulke algemene maten zijn uitvoerig bestudeerd door J. Radon (1913), in eenvoudige gevallen reeds door Lebesgue zelf. Zij heten wel maten van *Lebesgue-Stieltjes* of ook wel maten van *Radon-Stieltjes* (de naam van Stieltjes komt voor omdat de op deze maten gebouwde integralen zich verhouden tot de Lebesguese integraal als Stieltjes integralen zich verhouden tot de gewone Riemannse integraal).

De volgende stap naar abstractie is nu niet groot. Als de grootte van de maat $\mu(A)$ voor de cel $A = (a, b; c, d]$ toch niets meer te maken heeft met de hoekpunten van de cel, kunnen we net zo goed de Euclidische ruimte geheel verlaten, en overgaan naar een abstracte puntverzameling X, waarin een zekere basiscollectie van deelverzamelingen A, cellen genaamd, aanwezig is, zo dat er een maat $\mu(A)$ voor elke cel A gedefinieerd is, die aan de eisen (a) en (b′) voldoet. Het uitbreidingsproces kan dan weer toegepast worden. Deze stap naar maten in abstracte ruimten is door M. Fréchet (1915) gedaan.

Het wordt nu tijd het integraalbegrip nader te beschouwen, dat natuurlijk nauw samenhangt met het maatbegrip (in het platte vlak bijv. is de oppervlakte van een „nette figuur" immers met behulp van enkelvoudige integralen te beschrijven, en in de driedimensionale ruimte is de inhoud van een „nette figuur" met dubbelintegralen te beschrijven). Men kan, als men het maatbegrip eenmaal heeft, op diverse manieren tot het integraalbegrip komen. H. Lebesgue, de grondlegger van het moderne integraal begrip, deed dit op een bepaalde manier (1902); in de laatste twintig jaren is echter een behandelingsmethode op de voorgrond genomen, die het mogelijk maakt de gehele theorie uit te breiden tot integratie op locaal-compacte topologische ruimten (speciaal locaal-compacte groepen). Deze methode is voor het eerst aangegeven door P. J. Daniell (1918); moderne uitwerking bij M. H. Stone (1948) en Bourbaki (1950). Bij de integratietheorie op zichzelf heeft men nog geen topologie nodig.

Om de methode uiteen te zetten, is het aan te bevelen niet direct het meest abstracte uitgangspunt te kiezen, maar te beginnen met

een karakteristiek voorbeeld, dat ook bij Daniell zelf als aanknopingspunt dient.

We beschouwen de collectie van alle reële continue functies $f(x)$ op het eindige gesloten interval $a \leqq x \leqq b$, en we geven de Riemannse integraal van $f(x)$ met $I(f)$ aan. Deze $I(f)$ heeft de volgende eigenschappen:

1. $-\infty < I(f) < +\infty$.

2. $I(f)$ is lineair, d.w.z. als $f(x)$ en $g(x)$ continu zijn, en als a en b reële constanten zijn, dan is $I(af + bg) = a\,I(f) + bI(g)$.

Op grond van 1 en 2 zegt men dat $I(f)$ een eindige, reële, *lineaire functionaal* op de verzameling der continue functies is.

3. Als $f(x) \geqq g(x)$ op $[a, b]$, dan is $I(f) \geqq I(g)$. Bijzonder geval: Als $f(x) \geqq 0$ op $[a, b]$, dan is $I(f) \geqq 0$. Op grond hiervan zegt men dat $I(f)$ een *positieve* lineaire functionaal is.

4. Als $f_n(x) \downarrow 0$ voor alle x in $[a, b]$, dan is $I(f_n) \downarrow 0$. Het bewijs van 4 volgt door op te merken dat uit $f_n(x) \downarrow 0$ op $[a, b]$ volgt dat $f_n(x) \downarrow 0$ gelijkmatig op $[a, b]$ volgens de stelling van Dini.

De opgave, die Daniell zich stelde, is nu om $I(f)$ te definieren voor een uitgebreidere collectie van functies dan alleen de continue functies, en wel zo dat de eigenschappen 1 t.e.m. 4 behouden blijven. Dit gelukt, en in het hier gekozen voorbeeld valt de uitbreiding van $I(f)$ precies samen met de langs andere weg al door Lebesgue verkregen uitbreiding; voor zo'n $f(x)$ uit de uitgebreide collectie heet $I(f)$ dan ook de Lebesguese integraal van $f(x)$ over het interval $[a, b]$. Het uitbreidingsproces is analoog aan dat voor een maat, en door in de manier van redeneren nog een zekere wending aan te brengen, kan men zelfs laten zien, dat het daarvan een bijzonder geval is (de gestelde conditie 4 zorgt ervoor dat de maat, die geintroduceerd wordt, aan de eis van σ-additiviteit voldoet).

De overgang tot een meer abstracte situatie is nu niet moeilijk. In plaats van het interval $a \leqq x \leqq b$ nemen we een willekeurige abstracte puntverzameling X; de punten daarvan noemen we x, y, ... Als aan elk punt x uit X een reëel getal $f(x)$ toegevoegd is, dan is daardoor een reële functie op X gedefinieerd. We beschouwen nu een zekere collectie L van zulke functies $f(x)$, zó dat:

(a) De collectie L is lineair, d.w.z. als $f(x)$ en $g(x)$ in L zitten, en a, b zijn reële constanten, dan zit $af(x) + bg(x)$ ook in L.

(b) Als $f(x)$ en $g(x)$ in L zitten, dan zitten de functies max (f, g) en $\min(f, g)$ ook in L.

Zo'n collectie L heet wel een *lineair rooster* of lineair netwerk (Engels: lineair vectorlattice). De hierboven genoemde collectie der continue functies op $[a, b]$ is er een voorbeeld van.

Aan elke $f(x)$ uit L denken we ons nu een reëel getal $I(f)$ toegevoegd, zó dat $I(f)$ aan 1° t.e.m. 4° voldoet.

Het uitbreidingsproces werkt dan weer, en de lineaire functionaal $I(f)$ op de uitgebreide collectie heet de *Daniellse integraal* van $f(x)$. Lebesguese integralen en integralen van Radon-Stieltjes zijn hiervan bijzondere gevallen. Voor de Lebesguese integraal, bijv. weer in het platte vlak, ziet men dit als volgt in:

Een functie $f(x, y)$, gedefinieerd voor alle (x, y), die in totaal slechts eindig veel waarden aanneemt, zó dat elke waarde $\neq 0$ aangenomen wordt op een volgens Lebesgue meetbare verzameling van eindige maat, heet een *trapfunctie.* Als E zo'n verzameling van eindige maat is, duiden we de functie, die 1 is op E en nul buiten E, aan door $\chi_E(x)$. Zo'n $\chi_E(x)$ is dus zelf een eenvoudige trapfunctie. Elke trapfunctie is nu van de vorm $f(x) = \sum_{n=1}^{p} c_n \chi_{E_n}(x)$; $c_1, \ldots, c_p$ constanten; $E_p \ldots\ldots E_p$ disjuncte verzamelingen van eindige maat. De collectie van alle trapfuncties is een lineair rooster. Als we nu definieren $I(f) = \sum_{n=1}^{p} c_n \mu(E_n)$, dan is het niet moeilijk om te bewijzen dat $I(f)$ een lineaire functionaal is, die aan 1° t.e.m. 4° voldoet (1° t.e.m. 3° zijn triviaal; 4° is iets moeilijker). Voor trapfuncties is deze $I(f)$ ook juist het getal, dat men intuitief als de integraal van $f(x)$ aanvoelt. Het uitbreidingsproces levert nu de Lebesguese integraal.

Alle aangename eigenschappen, waardoor de Lebesguese integraal in vele gevallen zo veel bruikbaarder is dan de Riemannse integraal, behoren ook tot de kenmerken van de Daniellse integraal. We zullen er hier niet nader op ingaan. Wel kan tot slot het volgende opgemerkt worden (Stone; 1948): Als het lineaire rooster L van functies, waarop $I(f)$ oorspronkelijk gedefinieerd is, nog de eigenschap bezit, dat tegelijk met $f(x)$ ook altijd min $(f(x), 1)$ tot L behoort, dan is het mogelijk om in de puntverzameling X een maat in te voeren (ook als die er eerst niet was), zó dat de verkregen Daniellse integraal juist de integraal van Radon-Stieltjes ten aanzien van deze maat is. In dit geval is de abstracte Daniellse integraal toch weer identiek met een meer vertrouwd soort integraal.

CONTINUUM EN REËEL GETAL [1])

door

Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

1.1. *Inleiding.*

De leer van de getallen begint bij het aantal, het *natuurlijke* getal. Economische problemen van lenen en verdelen introduceren de negatieve en gebroken getallen.

Voor het optekenen en verwerken van waarnemingen (tellingen of metingen) zijn de rationale getallen een toereikend systeem. Bovendien leent dit rationale getalsysteem zich voor beschrijving van het gebeuren in de natuur.

In de laatste jaren ontwikkelt een groep Finse mathematici een theoretische natuurkunde, waarbij een eindig lichaam (met zeer groot aantal elementen) de plaats van het lichaam van de rationale getallen in de klassieke natuurkunde inneemt. Voor bepaalde micro- en macro-cosmische problemen geeft deze theorie nieuwe gezichtspunten [1].

De Euclidische meetkunde laat zich echter niet met de rationale getallen beschrijven, de verhouding van zijde tot diagonaal is in vele rechthoeken niet rationaal. Intuitief wil men aan deze verhouding toch een getal toekennen en komt tot de invoering van een getalsysteem dat meer dan de rationale getallen bevat.

We zullen twee verschillende methoden schetsen om het reëele getal in te voeren. Bij de eerste zullen we alleen beschouwingen over de *ordening* van de getallen gebruiken en de rekenkundige bewerkingen zoals optellen en vermenigvuldigen niet beschouwen. Bij de tweede methode zullen we deze eigenschappen centraal stellen, van de ordening maken we alleen gebruik om tot een *absolute waarde* te komen.

2.1. *Geordende systemen.*

Een verzameling elementen heet een totaal geordende verzameling als er een binaire relatie $<$ gegeven is, die voldoet aan

I Als $a \neq b$ dan $a < b$ of $b < a$

II Als $a < b$ dan $a \neq b$

III Als $a < b$ en $b < c$ dan $a < c$.

---

[1]) Voordracht gehouden in de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum, 28 augustus 1956.

Twee zulke verzamelingen heten equivalent als er een één-éénduidige afbeelding bestaat, die verdraagbaar is met de ordening d.w.z. als $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$ en $a < b$ dan ook $a' < b'$.

Voorbeelden van totaal geordende verzamelingen zijn:

1. $1, 2, 3, \ldots n$
2. de natuurlijke getallen
3. de gehele getallen
4. de rationale getallen
   allen met de gebruikelijke ordening.
5. alle paren (a, b) van natuurlijke getallen met de ordening bepaald door $(a, b) < (c, d)$ als $a < c$ of als $a = c$ en $b < d$.
6. alle paren (a, b) met $a = 0,1$ en b geheel en de ordening als boven.

In de voorbeelden 1, 2, 3, 5 en 6 heeft bijna ieder element een directe voorganger en een directe opvolger, zoek zelf de uitzonderingen! Bij 4 ligt tussen ieder tweetal elementen weer een element van de verzameling, zulke verzamelingen noemen we *dicht.* Deze zullen we nu nader beschouwen.

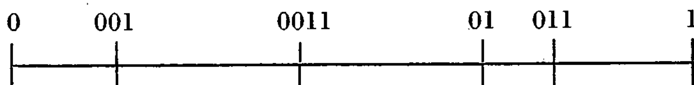
2.2 *Het rationale type.*

We proberen nu een dichte totaal geordende verzameling te construeren met een eerste en een laatste element.

We nemen als elementen, het is duidelijk dat er oneindig veel moeten zijn, symbolen opgebouwd door het achter elkaar plaatsen van cijfers 0 en 1, waarbij het eerste cijfer steeds een 0 is (behalve bij 1) en het laatste cijfer steeds een 1 is (behalve bij 0). Om voor deze symbolen een ordening in te voeren spreken we af dat van twee symbolen diegene de kleinste is, die op de eerste plaats (van vooraf geteld) waar ze afwijken een nul of geen cijfer meer heeft staan.

Deze ordening, die ook in bibliotheken gebruikt wordt, is ook te beschouwen als de normale ordening op de verzameling van alle in het tweetallig stelsel opgaande breuken tussen 0 en 1.

Voorbeelden: $0101 < 011$; $001 < 0101$; $01 < 011$ eventueel ook te representeren door streepjes op een rechte



Deze dicht geordende verzameling is equivalent met de verzameling van de rationale getallen tussen 0 en 1 met de gewone ordening. We rangschikken de breuken tussen 0 en 1 daartoe naar opklimmende noemer en definieren de toevoeging in overeenstemming met de ordening, dus $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$, $\frac{1}{2} \rightarrow 01$, $\frac{1}{3} \rightarrow 001$, $\frac{2}{3} \rightarrow 011$, $\frac{1}{4} \rightarrow 0001$, $\frac{3}{4} \rightarrow 0111$, $\frac{1}{5} \rightarrow 00001$, $\frac{2}{5} \rightarrow 0011$, $\frac{3}{5} \rightarrow 0101$, $\frac{4}{5} \rightarrow 01111$ etc.

Dat deze toevoeging werkelijk één-éénduidig is berust op het feit dat bij iedere nieuwe stap nooit twee breuken met eenzelfde noemer in eenzelfde vakje komen te liggen.

Om deze geordende verzameling te karakteriseren hebben we het begrip *aftelbaar* nodig. Een verzameling heet aftelbaar als hij één-éénduidig op de verzameling van de natuurlijke getallen kan worden afgebeeld. (De ordening speelt hier geen rol).

Men bewijst algemeen: iedere twee dichte geordende verzamelingen met aftelbaar veel elementen en met een eerste en laatste element zijn equivalent, en dus equivalent met de verzameling van de rationale getallen (met de natuurlijke ordening) tussen 0 en 1 [2].

2.3. *Het continuum.*

De dichte geordende verzameling van het rationale type is nog niet voldoende dicht zoals uit meetkundige problemen blijkt. De manier waarop we in 2.2 elementen vastlegden was duidelijk een soort van tussenschikking, links van dit maar rechts van dat. Het lijkt alsof bij deze schikking, die overal dicht is, toch nog gaten gebleven zijn. Om deze op te vullen stellen we aan onze totaal geordende verzameling nog een extra eis, die de elementen als scheidingen invoert:

D. Als alle elementen in twee niet lege verzamelingen L en R verdeeld worden zodat voor alle $l \in L$ en alle $r \in R$ geldt $l < r$ dan is er een element x zodat alle elementen kleiner dan x tot L en alle elementen groter dan x tot R behoren.

De rationale getallen voldoen niet aan de eis D, kies als voorbeeld voor L de verzameling rationale getallen l met $l^3 < 2$ en voor R de rationale getallen met $r^3 > 2$. Dan is er geen x die deze vezamelingen scheidt. Dus voldoet ook onze verzameling symbolen 0101 etc. niet aan D.

We beschouwen nu alle symbolen met oneindig veel cijfers 0 en 1 te beginnen met 0. [Formeel gezegd beschouwen we de functies op de natuurlijke getallen met waarden 0 en 1]. We ordenen ze analoog als in de vorige paragraaf. Er zijn nu meer dan aftelbaar veel elementen. Stel immers dat een aftelling gegeven was en construeer een symbool dat op de $(n+1)$ste plaats juist het andere cijfer heeft als het n-de symbool in onze aftelling. Dit symbool kan geen rangnummer gekregen hebben.

De nu verkregen verzameling is echter niet meer dicht geordend, tussen 00111 . . . en 0100 . . . b.v. ligt geen element. We heffen dit bezwaar op door dit soort paren elementen te identificeren. Omdat er maar aftelbaar veel van zulke paren zijn blijft de overblijvende

dicht geordende verzameling over-aftelbaar. De nu verkregen verzameling heeft echter wel de eigenschap D. Om dit te bewijzen construeren we bij gegeven L en R een symbool x door ieder cijfer 1 te kiezen tenzij het, dan afgebroken en verder met nullen aangevulde symbool in R zou liggen, in welk geval we 0 kiezen. Het zo ontstane element is het gevraagde scheidingselement.

Iedere dicht geordende verzameling, die de eigenschap D bezit heeft meer dan aftelbaar veel elementen. [2]. Niet alle zulke verzamelingen zijn equivalent, laten we de verzameling van alle paren van de boven ingevoerde symbolen weer ordenen volgens het eerste en fijn ordenen voor het tweede symbool. Deze verzameling is zeker niet equivalent met de verzameling van alle symbolen zonder meer.

Wel geldt de stelling dat alle dicht geordende verzamelingen met de eigenschap D, die bovendien een aftelbare overal dichte deelverzameling bevatten equivalent zijn [2]. Deze bepalen het orde type van de reële getallen of van het continuüm.

2.4. *De continuum hypothese.*

We zeggen dat twee verzamelingen gelijke machtigheid bezitten als er een één-éénduidige afbeelding van de ene verzameling op de andere verzameling mogelijk is. We ontmoetten reeds het type van de verzamelingen met machtigheid aftelbaar. Het boven geconstrueerde continuum heeft een grotere machtigheid. Cantor's hypothese is dat er geen verzameling is met machtigheid groter dan aftelbaar en kleiner dan het continuum.

Dit probleem blijkt samen te hangen met de grondslagen van de verzamelingenleer. Gödel toonde aan dat als de axioma's van de verzamelingenleer consistent zijn, zij dit blijven na toevoeging van Cantor's hypothese als extra axioma. [3].

3.1. *Het lichaam van de rationale getallen.*

We beginnen nu met een axioma stelsel voor de natuurlijke getallen.

1. De verzameling P van de natuurlijke getallen is niet leeg.
2. Er is een één-éénduidige afbeelding $a \rightarrow a^*$ van P in P.
3. De beelden vormen een echte deelverzameling in P.
4. Iedere deelverzameling van P, die een element bevat, dat geen beeld is en met ieder element ook het beeld bevat valt met P samen.

Uit deze axioma's kan het bestaan van twee commutatieve en associatieve composities worden afgeleid, de optelling en vermenigvuldiging, die door de distributieve regel zijn verbonden. Het

systeem van de natuurlijke getallen vormt onder beide composities een *semi-groep*, dat is een systeem waarin naast de associatieve eigenschap de compositie nog aan de schrapwet voldaan is, d.w.z. uit $a * b = a * c$ volgt $b = c$. Een commutatieve semi-groep is steeds in te bedden in een groep door over te gaan op paren (a, b) met de compositie $(a, b) * (c, d) = (a * c, b * d)$. Door (a, b) equivalent met (c, d) te noemen als $a * d = b * c$ ontstaat een indeling in klassen. Deze klassen vormen nu een groep, het eenheidselement is de klasse waar (a, a) in ligt, de klassen met (a, b) en (b, a) zijn elkaars inverse. De klassen $(a * p, p)$ vormen in de groep een semi-groep, die isomorf is met de oorspronkelijke semi-groep.

Langs deze weg kan men de natuurlijke getallen door de optelling tot de gehelen en door de vermenigvuldiging tot de gebroken getallen uitbreiden. Langs deze weg construeert men algebraïsch uit de natuurlijke getallen het lichaam van de rationale getallen; waarin optelling en aftrekking, vermenigvuldiging en deling (behalve door 0) onbeperkt mogelijk zijn [4].

3.2. *Het lichaam van de algebraïsche getallen.*

Van algebraïsch standpunt zouden we het rationale lichaam kunnen willen uitbreiden tot een lichaam waarin algebraïsche vergelijkingen steeds wortels hebben. Het lichaam van de algebraïsche getallen, d.w.z. van de wortels van vergelijkingen met rationale coefficienten is algebraïsch afgesloten, iedere algebraïsche vergelijking met algebraïsche coefficienten valt in dit lichaam volledig in lineaire factoren uiteen.

Dit lichaam omvat enerzijds meer dan het lichaam van de reëele getallen, namelijk een getal met kwadraat -1, anderzijds minder omdat bijvoorbeeld het getal π niet algebraïsch is.

Het lichaam van de algebraïsche getallen heeft aftelbaar veel elementen.

3.3 *Absolute waarde en perfecte afsluiting.*

Om van de rationale getallen tot de reële getallen te komen, hebben we een topologisch proces nodig. We gebruiken nu dat voor de rationale getallen een *waardering* (absolute waarde) gegeven is, die voldoet aan

1. $|a| > 0$ als $a \neq 0$; $|0| = 0$
2. $|ab| = |a| . |b|$.
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

We definiëren nu fundamentaal rijen (Cauchy rijen) door

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, terwijl bij iedere natuurlijk n een N te vinden is zodat voor $p, q > N$ geldt $| a_p - a_q | < \frac{1}{n}$.

Twee fundamentaal rijen heten equivalent als bij iedere n een N te vinden is zodat voor $p > N$ geldt $| a_p - b_p | < \frac{1}{n}$. Uit deze equivalentie vinden we een klasse indeling van de fundamentaalrijen. Voor deze klassen definiëren we weer arithmetische bewerkingen en een absolute waarde op voor de hand liggende manier. Deze klassen noemen we nu reële getallen. Ze vormen een lichaam en bovendien heeft in dit lichaam iedere Cauchy rij een limiet, d.w.z. er bestaat een getal α bij een Cauchy rij $\{a_1, a_2, \ldots\}$ zodat voor iedere n een N is, met voor $p > N$ de ongelijkheid $| \alpha - a_p | < \frac{1}{n}$.

Men zou met een andere absolute waarde op de rationale getallen analoog te werk kunnen gaan. Laat p een priemgetal zijn, dan wordt een absolute waarde gedefinieerd voor de rationale getallen door

$$\left| \frac{t}{k} p^{\alpha} \right|_p = p^{-\alpha} \text{ voor } (t, p) = (n, p) = 1$$

Deze functie voldoet aan de bovengestelde eisen 1, 2 en 3. Door de invoering van Cauchy rijen kunnen we zo voor ieder priemgetal een perfect lichaam (dat is een lichaam waarin iedere Cauchy rij een limiet heeft) construeren.

Van uit dit standpunt bezien zijn deze lichamen even belangrijk als het lichaam van de reële getallen, opmerkelijk is dat bij de dieper liggende stellingen van de getaltheorie ook al deze lichamen gebruikt worden. Voor de natuurkundige toepassingen missen we echter de ordening. Verder zal in zo'n p-adisch lichaam niet steeds bij gegeven a en b een natuurlijk getal m gevonden kunnen worden zodat $| ma |_p > | b |_p$, omdat de absolute waarde van alle natuurlijke getallen kleiner of gelijk aan 1 is. Deze p-adische absolute waarden (of waarderingen) heet daarom *niet-archimedisch.*

Een waardering heet archimedisch als alle natuurlijke getallen een waarde groter of gelijk aan 1 hebben.

In perfecte archimedische zowel als niet-archimedische lichamen kan een analyse opgebouwd worden. Wel komen er opmerkelijke verschillen. In de niet-archimedische gevallen convergeert bijvoorbeeld een reeks steeds als de absolute waarde van de termen tot nul nadert. De exponentiële reeks convergeert in het niet-archimedische geval niet overal [5].

We noemen tot slot nog twee stellingen, die een bizonder licht

werpen op de reële getallen. De eerste is oorzaak van de bruikbaarheid in de toepassingen:

A. Na een quadratische uitbreiding met *i* worden de reële getallen een *algebraïsch afgesloten* lichaam [Hoofdstelling van de algebra].

De tweede geeft de uniciteit van de reële getallen weer.

B. Ieder archimedisch gewaardeerd perfect lichaam is isomorf hetzij met de reële hetzij met de complexe getallen [6].

4.1. *Literatuur*:

[0] L. R. and H. G. LIEBER: Infinity [Rinehart & Co, New York]

[1] Zie bijvoorbeeld:
G. JÄRNEFELT: An attempt to work out a finite system ... in Comptes Rendues du 12 Congres Mat. Skand. 1953, pg. 116 en daar geciteerde literatuur.

[2] Voor de bewijzen van deze stellingen verwijzen we naar E. V. HUNTINGTON: The Continuum (Dover Publ. 1955).

[3] Een zeer lezenswaardig overzicht is te vinden in K. GÖDEL: What is Cantor's continuum problem. Am. Math. Monthly **54** (1947) p. 515.

[4] De opbouw van het reële getal kunt U o.a. vinden in L. M. GRAVES: Theory of Functions of real variables, Chap. II.

[5] Een inleiding in de analyse in een niet archimedisch gewaardeerd lichaam is o.a. te vinden in H. HASSE: Zahlentheorie (Akademia Verlag, 1949) par. 17. F. LOONSTRA: Analytische Untersuchungen über bewertete Körper.

[6] Van deze stelling zijn verschillende bewijzen bekend, een eenvoudig is te vinden in het boven geciteerde boek van Hasse (pg. 146).

BERICHT VAN DE REDACTIE

Voor een goede werkwijze van de redactie is het noodzakelijk, dat steeds enige copie voor volgende nummers gezet en gecorrigeerd klaar staat. Op het ogenblik is dit nogal veel, o.a. doordat de voordrachten van de vakantiecursus in augustus 1956 op plaatsing wachten. Auteurs van artikelen, die dus reeds enige tijd geleden de drukproef terugzonden, behoeven dus niet aan een misverstand te denken, wanneer hun stuk niet direct wordt geplaatst.

Red.

AANMELDING EXAMENS

Kandidaten voor de in 1957 te houden examens voor de akten K I tot en met K V dienen vóór 1 maart 1957 per briefkaart en zonder overlegging van enig ander stuk een aanmeldingsformulier aan te vragen bij de heer A. J. S. van Dam te 's-Gravenhage, Fuutlaan 10.

HET LEERPLAN IN DE BRANDING

door

Dr. A. VAN HASELEN

In dit artikel wil ik enige bezwaren van de heer Korff tegen het Wimecos-programma weerleggen en enige voordelen, die ik er bij mijn lessen van ondervonden heb, meedelen.

Het doet een lezer van Euclides vreemd aan, in een tweetal artikelen [1]) van de heer Korff een zeer afbrekende kritiek op het nieuwe programma te vinden. Men verwacht niet, dat in dit tijdschrift de gelegenheid gegeven wordt, het uitstekende werk van de Wimecos-commissie, waaraan zowel de leden van Wimecos als die van Liwenagel met overgrote meerderheid hun goedkeuring gegeven hebben, zo volledig af te breken.

In de derde alinea van het tweede artikel lezen we: „Hebben de leden wel goed overwogen, waartoe ze besloten toen ze vóór het nieuwe leerplan stemden? De tijd tussen het tijdstip, waarop het concept leerplan werd ontvangen en de vergadering, waarin dit voorstel goedgekeurd werd, was zeer kort". De heer Korff veronderstelt dus, dat de leden, die de moeite gedaan hebben om de vergaderingen, waarin over het leerplan werd gestemd, te bezoeken, niet goed wisten wat ze deden toen ze voorstemden. Dit is een onvriendelijkheid aan het adres van de leraren, die hun belangstelling voor verbetering van het onderwijs getoond hebben, door vóór het nieuwe programma te stemmen.

Bovengenoemd argument houdt trouwens geen steek. Een leraar, die zich op de hoogte stelde van de publikaties over plannen voor onderwijsvernieuwing van de W.V.O., van Wimecos en van Liwenagel, zal niet verrast zijn door de inhoud van het concept leerplan. Het programma is het resultaat van jarenlange discussies van leraren, die wensen in dezelfde tijd, die nodig is voor het oude programma, andere leerstof te behandelen, die de leerlingen beter tot volwaardige leden van de maatschappij of tot goede studenten kan vormen.

---

[1]) Jg. 31 I blz. 21—28 en 32 II blz. 44—53.

Daarom verwondert mij ook de opmerking [1]) van de heer Korff: „Maar ik zie niet in, dat zulke belangrijke beslissingen in zo korte tijd genomen, onfeilbaar zijn". Mensenwerk is bovendien niet onfeilbaar.

Dat dit leerplan de goedkeuring van een zo overweldigend groot aantal leden heeft verkregen, komt niet doordat de leden het met iedere verandering volkomen eens zijn, maar doordat de leden met het oude programma niet meer tevreden zijn nu ze van de grote verbeteringen, die het nieuwe programma kan brengen, overtuigd zijn.

Het grote gevaar van artikelen als die van de heer Korff is, dat de autoriteiten, die een beslissing moeten nemen over het al of niet invoeren van het nieuwe programma, de bezwaren ertegen onevenredig zwaar zullen laten wegen, zwaarder dan de voordelen, die de vele goede veranderingen opleveren. Daardoor zou de officiële invoering ervan jaren kunnen worden vertraagd, zeer ten nadele van onze leerlingen.

Het resultaat is dan, dat de verbetering van het onderwijs, die nu met één slag kan worden verkregen, lang op zich zal laten wachten. Het nieuwe leerplan zal dan officieus worden ingevoerd. Geen enkele leraar, die zich in de mogelijkheid verdiept heeft om het onderwijs te verbeteren, zal voortgaan zijn lessen op de oude manier te geven. Bij het nieuwe leerplan zijn de resultaten van persoonlijke vernieuwing samengebundeld. Daarom ook is het zinloos, ieder detail van het programma aan kritiek te onderwerpen.

De commissie heeft zich m.i. afgevraagd, wat de maatschappij en de universiteit later van onze leerlingen vraagt. Van onze leerlingen wordt dan niet verlangd, dat ze door dressuur ingewikkelde eindexamenvraagstukken kunnen oplossen, maar wel dat ze karakter hebben gekregen en dat ze over een onderwerp zelfstandig kunnen nadenken.

De heer Korff wijst op de vergissing bij het eindexamenprogramma in de handelswetenschappen bij de H.B.S. A [2]). Als bij de invoering van de nieuwe leerstof voor Wiskunde een dergelijke vergissing zou optreden, dan nog zou ik het nieuwe programma prefereren boven het oude. Laten we toch niet als goede Hollanders overal problemen zien, maar eens iets aandurven op gevaar af, dat we brokken maken, die ik trouwens niet verwacht.

Met grote verwondering las ik, dat het op sommige scholen de

---

[1]) [2]) II blz. 45.

gewoonte is, belangrijke delen van de leerstof van de derde en zelfs van de tweede klasse naar de vierde te verschuiven [1]). Deze wantoestand is m.i. niet het gevolg van een verkeerd programma, maar wel van een verkeerde interpretatie van dit programma. Het kan ook zijn, dat men zich niet aan een programma wenst te storen. Maar dan heeft het geen zin om bezwaar te maken tegen de verandering ervan.

Het is een loffelijk streven, op de H.B.S. B en op het Gymnasium B eenzelfde wiskundeprogramma in te voeren. Hoewel het Gymnasium dit in minder lesuren moet afwerken dan de H.B.S., zal het er toch zeker prijs op stellen dat bij beide scholen de eindexamens in de wiskunde gelijkwaardig zijn. Het is *niet* waar, dat de H.B.S. B **de** vooropleiding voor de ingenieursstudie en de studie in de exacte vakken en medicijnen is [2]).

Het verwondert me, dat de heer Korff zoveel waarde hecht aan de ontbinding van vormen als $6x^2 + 7x - 5$. De leerlingen moeten deze ontbinding als een kunstje leren. Ze begrijpen er niets van. In de hoogste klassen kunnen alleen de goede leerlingen $6x^2 + 7x - 5$ ontbinden. Bij de breuken moeten deze ontbindingen dan ook weer ter sprake komen, want anders zijn ze zinloos. Dit kost dan in de eerste klasse 5 uur en later voor het repeteren en toepassen minstens 3 uur, dus totaal zeker **8 uur.** Dat is meer tijd dan ik in de zesde klasse voor de behandeling van de integraalrekening nodig heb.[3])

Waarom zullen we de nulwaarden van $x^2 - x\sqrt{7} + \sqrt{3}$ berekenen? [4]) Voor de verdere leerstof is dat van geen belang. En als ze nodig zijn, kunnen we ze beter in één decimaal nauwkeurig schatten. Bij de behandeling van de wortelvormen kan men gemakkelijk 10 uur gebruiken voor herleiding van ingewikkelde vormen, waarvan het belang zeer dubieus is. Toevallig hoorde ik van enige oud-leerlingen die in Delft studeren, dat het grootste deel van de aankomende studenten niet weet, dat $\sqrt{a^2} = |a|$ is. Zolang ze dat niet weten en dus de definitie van $\sqrt{a}$ niet kennen, is het zinloos, alle mogelijke kunstjes met wortelvormen te behandelen. Alleen de herleiding van $\sqrt{(a \pm b\sqrt{c})}$ kost al 4 uur [5]). We kunnen wel aannemen, dat bij de wortelvormen weer **10 lessen** besteed worden aan onderwerpen, die voor de verdere opbouw van de algebra zinloos zijn. Routine kunnen de leerlingen veel beter krijgen met behulp van eenvoudige zinvolle vraagstukken. Gecompliceerde

[1]) II. blz. 51.
[2]) [3]) [4]) I blz. 21.
[5]) I blz. 22.

opgaven over leerstof, die voor het verdere onderwijs geen betekenis heeft, zijn zinloos.

Ingeklede vergelijkingen kunnen in 5 uur, inplaats van in 20 uur behandeld worden [1]). Hiervoor wordt **15 uur** te veel gebruikt. De leerlingen hebben ze alleen nodig bij de natuur- en scheikundelessen en daar is het kiezen van de onbekende geen probleem. We hoeven dus de onbekende niet zo te leren stellen, „dat er iets verstandigs gebeurt". In de praktijk hebben ze de vraagstukken ook niet nodig. Vraagstukken over arbeiders zijn zinloos, want als één arbeider een werk in 8 dagen *kan* doen, zullen twee arbeiders er samen zeker 5 dagen over doen.

In de eerste en tweede klasse besteedt de heer Korff dus **33 uur** aan voor het programma onbelangrijke dingen. Dit aantal is zeer voorzichtig geschat. Het aantal uren, dat hij in de eerste en tweede klasse kan vrij maken voor belangrijker onderwerpen zal dus ongeveer voldoende zijn voor de behandeling van de statistiek.

Het argument „het kwalitatieve en kwantitatieve lerarentekort" mag de heer Korff niet tegen de statistiek gebruiken [2]). Het programma is bedoeld voor normale omstandigheden. Bovendien heeft bijna geen enkele leraar, die nu onderwijs geeft, ervaring met lessen in de statistiek, dus wat dat vak betreft hebben de onbevoegde leraren geen achterstand bij de bevoegde.

Het lijkt mij wenselijk, dat we onze leerlingen de grondbeginselen van de statistiek onderwijzen. In het bedrijfsleven is statistiek een onontbeerlijk hulpmiddel, evenals bij de meeste studies. Waarschijnlijk zullen we onze leerlingen niet zover kunnen brengen, dat ze uit statistische gegevens een conclusie kunnen trekken. Men ziet dikwijls uit statistische gegevens een conclusie trekken, die men niet als een objectief oordeel kan beschouwen.

De heer dr. Bunt komt in het rapport over zijn statische onderzoek tot de conclusie: „het wiskundeprogramma is op de H.B.S. met 25 % en op het Gymnasium met 40 % overladen".

De heer Korff schrijft hierover: „het komt mij voor, dat deze conclusie een veel te optimistisch beeld geeft omtrent de mogelijkheden om dit programma af te werken".

Als ik het artikel van de heer dr. Bunt goed begrepen heb, komt hij tot bovengenoemde conclusie, door de onderwerpen, die de leraren zouden willen behandelen, maar die door tijdnood daarvoor niet in aanmerking komen, de revue te laten passeren. Dit is een

---

[1]) I blz. 22.

[2]) II blz. 47.

objectief oordeel. Als de heer Korff nu deze conclusie in twijfel trekt, hecht hij meer waarde aan zijn eigen ervaring als aan de ervaringen van zijn collega's die het de heer dr. Bunt mogelijk maakten deze statistiek samen te stellen.

De bedoeling van het nieuwe programma is nu, de overlading weg te werken door zóveel „minder belangrijke" onderwerpen te schrappen, dat er ruimte komt voor de meest belangrijke. Ik hoop, dat het zal blijken, dat de commissie daarin volledig geslaagd is.

De heer Korff trekt uit de opmerking van de heer dr. Wansink: „En om deze leerstof in de hogere klassen is het in de eerste plaats begonnen", de conclusie: „Blijkbaar is dus niet het opstellen van een harmonisch programma doel geweest". [1]) Deze conclusie is volkomen onjuist.

De enige manier om de leerstof in de hogere klassen met succes te kunnen invoeren is: een harmonisch programma opstellen voor de lagere klassen, dat geheel op dit doel gericht is. En ik ben overtuigd, dat de commissie daarin goed geslaagd is. Het begrip is centraal gesteld en de techniek wordt niet verwaarloosd.

Door het overboord gooien van alle overbodige ballast kunnen de begrippen beter tot zijn recht komen.

Bij mijn lessen op school behandel ik de algebra volgens het nieuwe programma. Daarvan heb ik veel genoegen ondervonden. Het lijkt me daarom gewenst, enige ervaringen, die ik daarbij opgedaan heb, mee te delen.

Zeer belangrijk lijkt het mij, in de eerste klasse de grondslagen goed te leggen. We kunnen daar onze leerlingen al met begrip leren werken. Dit geldt ook voor de minder begaafden. Ik heb juist weer aan de proefwerken kunnen zien, dat ook de minder goede leerlingen de optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing van natuurlijke getallen heel behoorlijk kunnen begrijpen. Dit heeft het voordeel, dat ze niet zoveel vraagstukken behoeven te maken dan wanneer ze alleen met routine moeten werken.

In de volgende klasse komen de breuken aan de orde. Daarbij hebben de leerlingen meer profijt van eenvoudige vraagstukken zonder ingewikkelde ontbindingen dan van ingewikkelde. De breuken blijven steeds moeilijk omdat de leerlingen van de lagere school zo heel weinig gedegen kennis ervan meebrengen.

We maken het onze leerlingen dikwijls zelf onmogelijk, functies en grafieken te begrijpen. Als we nl. beginnen met de lineaire functie en de grafiek daarvan, is het pleit eigenlijk al verloren. We kunnen

---

[1]) II. blz. 52.

b.v. beginnen met het tekenen van de grafiek van x^2 en daarna met de grafiek van een kwadratische functie. Zolang de leerlingen geen theorie geleerd hebben, lossen ze het volgende vraagstuk zonder veel moeite op:

Teken de grafiek van $f(x)$, als $f(x) = x^2 - 2x - 8$. $(-3 \leqq x \leqq 5)$ Voor welke waarden van x is $f(x) > 0$, is $f(x) > -5$? Welke waarden neemt $f(x)$ aan, als $x > 3$ is?

Ze zien dan, wat een functie is en wat een grafiek is en kunnen een grafiek vrij spoedig lezen. Maar als we de theorie van de uiterste waarden behandeld hebben, wordt de lust om een grafiek te lezen veel kleiner en hebben ze moeite met het bovengenoemde vraagstuk. Door het invoeren van een Y-as wordt het functiebegrip vertroebeld. De moeilijkheid om onze leerlingen grafieken en functies te leren zit m.i. dus niet in de leeftijd, waarop de leerlingen het moeten leren, maar in de methode, waarmee we trachten het ze te leren.

Bij de meetkunde is het invoeren van goniometrische verhoudingen een groot voordeel voor onze leerlingen. De meeste berekeningen van lijnstukken en oppervlakten van figuren worden er aanmerkelijk door vereenvoudigd.

Op het ogenblik gebruik ik voor de behandeling van de vlakke meetkunde ongeveer $6\frac{1}{2}$ wekelijks lesuur en ik hoop, dat dit bij het nieuwe programma 6 uur kan worden, als tenminste bij de berekening van zijden en hoeken van een gegeven driehoek met behulp van een tafel de vraagstukken eenvoudig blijken.

Het moet dan mogelijk zijn in de beschikbare tijd de leerstof van de onderbouw geheel af te werken.

Meer overleg zal er nodig zijn om de stof in de bovenbouw behoorlijk af te werken. Ten eerste kunnen we daarbij alle ingewikkelde stereometrievraagstukken uit ons onderwijs bannen. Ook ingewikkelde logaritmische vergelijkingen kunnen verdwijnen. Hierbij moeten we dan trachten, de gulden middenweg te bewandelen.

Verder kan er tijd worden bespaard, door na de kwadratische functie de differentiaalrekening te behandelen. We hebben dan het voordeel, dat we de uiterste waarden van functies met differentiaalrekening kunnen laten bepalen. (Een tweede afgeleide is hierbij niet nodig en ik zie ook niet in, dat we die moeten behandelen omdat hij bij de natuurkunde gebruikt wordt. Bij de natuurkunde is het trouwens ook geen bezwaar, hem af te schaffen. Schrijft men b.v. $v = \frac{ds}{dt}$ en $a = \frac{dv}{dt}$, dan is $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ overbodig.) Dit ontslaat ons dan van de plicht, om de gebroken kwadratische functie als een

afzonderlijk onderwerp te behandelen en geeft ook grote voordelen bij de goniometrie, vooral omdat bij het nieuwe programma de uiterste waarden van goniometrische functies van twee variabelen, waartussen een bepaalde betrekking bestaat, vervallen.

Mij bevalt het uitstekend om logaritmische vergelijkingen, logaritmische ongelijkheden, logaritmische functies en grafieken ervan als één onderwerp te behandelen. Dit levert tijdsbesparing en verduidelijkt het functiebegrip.

Dat men bij de integraalrekening zeker ook $\int \frac{1}{x} dx$ moet behandelen, lijkt me niet juist. Ik acht het verstandig om de afgeleide van e^x en $\ln x$ niet in het eindexamenprogramma op te nemen. Deze onderwerpen zouden nl. heel gemakkelijk tot een ongewenste examendressuur kunnen leiden. Wel hoop ik, dat het nieuwe leerplan ons zoveel speling zal laten dat ik deze onderwerpen in de zesde klasse toch kan behandelen. Enige jaren ben ik dit al van plan geweest, maar de daarvoor noodzakelijke tijd heb ik er nooit voor kunnen vinden.

Op het Gymnasium kan de integraalrekening op verantwoorde wijze behandeld worden. Het eist betrekkelijk weinig tijd en geeft een algemene methode voor de berekening van inhouden.

EEN INZICHT-TEST VOOR MEETKUNDE

door

Prof. Dr. A. D. DE GROOT

De meeste lezers van dit tijdschrift zullen waarschijnlijk reeds op de hoogte zijn van het feit, dat het Departement van O., K. en W. een subsidie heeft toegekend aan een door de Paedagogische Centra voor het V.H.M.O. ingediend research-project, dat gericht is op de constructie van een meetkunde-test. Het project is opgesteld door een werkgroep van de Paedagogische Centra; de uitvoering is aan schrijver dezes opgedragen.[1])

Bij de eerste besprekingen over dit plan is reeds gebleken, dat er bijzonder gemakkelijk misverstanden kunnen ontstaan over de bedoeling, de betekenis en de uitvoerbaarheid ervan. Het lijkt daarom gewenst hierover een korte uiteenzetting te geven voor de lezerskring van „Euclides”.

---

[1]) In de werkgroep hebben zitting de heren: C. J. Alders, Dr. L. N. H. Bunt, Prof. dr. A. D. de Groot, Prof. dr. J. Th. Snijders, Dr. H. Turkstra, Prof. dr. G. Wielenga, Dr. H. R. Wijngaarden. De werkzaamheden in verband met de uitvoering zijn reeds begonnen. Projectleider is de heer A. A. J. van den Broecke, psych. drs.

Een onderzoek naar de rijpheid voor wiskunde?

Oorspronkelijk lag het in de bedoeling van de Paedagogische Centra een veel groter, moeilijker en pretentieuzer probleem aan te pakken, namelijk dat van de „wiskunde-rijpheid" van leerlingen op de leeftijd, waarop zij het V.H.M.O. of het U.L.O. binnentreden. Er is in de werkgroep uitvoerig van gedachten gewisseld over de vraag, hoe dit probleem zou kunnen worden aangepakt. Daarbij lag het van het begin af aan in de bedoeling niet aan een onderzoek te beginnen, dat zich baseert op een bestaande psychologische theorie of opvatting over die „rijpheid": de betekenis van de resultaten van een dergelijk onderzoek zou dan immers afhankelijk blijven van de vraag of men in de theorie „gelooft" of niet. De bedoeling was een zo exact mogelijk empirisch onderzoek te verrichten, eventueel van beperkte strekking en omvang, maar zó dat uit de resultaten weliswaar beperkte, maar in ieder geval duidelijke conclusies getrokken konden worden.

In de discussies kwam nu echter al spoedig de volgende gedachtegang naar voren. „Rijpheid-voor-wiskunde" is niet iets, dat wij zonder meer aan een bepaalde leeftijd kunnen binden. Geen onderzoek, hoe ook opgezet, zal ooit tot resultaat kunnen hebben: op die leeftijd is „de" leerling nog niet rijp voor „wiskunde", op die leeftijd wel. De twee tussen aanhalingstekens geplaatste woorden geven de moeilijkheden aan: de „rijpheid" hangt niet alleen van de leeftijd af, maar ook van *de leerling* (zijn intelligentie, wiskunde-aanleg, instelling) en van wat onder *wiskunde* te verstaan is (welke stof, welke didactiek, welke docent). Met deze twee variabelen zal in ieder geval rekening moeten worden gehouden.

Verder werd gesteld, dat het alleen zin heeft over rijpheid voor wiskunde te praten, als wij enig idee hebben, hoe wij deze rijpheid (resp. onrijpheid) moeten constateren. Nu kan „rijpheid" voor wiskunde alleen betekenen: wiskunde-onderwijs kunnen verwerken. De enige manier, waarop wij objectief kunnen constateren of een leerling die „rijpheid" bezit, is derhalve: achteraf na te gaan of hij een bepaalde stof hééft verwerkt, dus of hij door het genoten onderwijs inderdaad enig wiskunde-inzicht heeft verworven. In principe zou men bij een empirisch onderzoek naar de „rijpheid" dus dit verworven inzieht moeten onderzoeken.

Dit is echter gemakkelijker gesteld dan uitgevoerd. Weliswaar heeft iedere wiskundeleraar, die in de eerste klassen doceert, hierover zijn eigen ervaringen. Men kan zelfs zeggen, dat hij niet anders doet dan juist deze twee dingen beproeven: een bepaalde leerstof

overdragen, en nagaan of dit door zijn leerlingen werd verwerkt. Hij wordt dagelijks geconfronteerd met blijken van „rijpheid" resp. „onrijpheid" van zijn leerlingen, en hij probeert daarvoor zijn eigen oplossingen te vinden. Het probleem is echter juist gelegen in de verscheidenheid van oplossingen, die door de individuele docenten worden beproefd, niet alleen wat betreft de didactiek, maar ook wat betreft de beoordeling van het al-dan-niet verworven inzicht. De grote verscheidenheid in beide opzichten — didactiek en beoordeling — maakt het op zichzelf al onmogelijk de eenvoudigste oplossing van het rijpheidsprobleem te beproeven, nl. het direct aan de wiskunde-docenten te vragen. Het resultaat zou slechts een verscheidenheid van meningen zijn — over didactiek en beoordeling.

In dit stadium van de besprekingen werd in de werkgroep ingezien, dat het verstandiger zou zijn het zo dubieuze rijpheidsprobleem voorlopig op de lange baan te schuiven. Het leent zich vooralsnog niet tot een exact empirisch onderzoek. Eerst zal er enige duidelijkheid moeten komen ten aanzien van de didactiek, die zou moeten worden toegepast om het rijpheidsvraagstuk empirisch te bestuderen, èn ten aanzien van de wijze waarop het „verworven inzicht" objectief moet worden beoordeeld. Eén kop van de draak was dus voorlopig afgehouwen; maar er kwamen er twee voor in de plaats.

De didactiek.

Het vraagstuk van de didactiek is een probleemgebied op zichzelf. Het was de leden van de werkgroep uiteraard bekend, dat er op dit gebied veel en belangrijk werk wordt verricht, maar ook, dat er een grote verscheidenheid van opvattingen en methoden bestaat. Dit is op zichzelf alleen maar een gezond verschijnsel. Echter geldt voor de didactische vraagstelling in veel opzichten hetzelfde als voor het rijpheidsprobleem. Wil men niet een op een theorie of een opvatting gebaseerd antwoord, maar een empirisch antwoord verkrijgen op de vraag of voor een bepaalde leerstof didactiek A beter (of slechter) is dan didactiek B, dan zal men moeten nagaan met welke didactiek men er beter in slaagt de leerlingen „inzicht" in de stof te doen verwerven. Zulke „evaluatie-experimenten" zijn weliswaar bijzonder moeilijk in voldoende objectieve en scherpe vorm uit te voeren, maar zij zijn mogelijk — mits men het erover eens kan worden hoe het verworven „inzicht" in de stof in kwestie moet worden bepaald. Het vraagstuk van de didactiek kan dus óók alleen dan in de vorm van scherpe evaluatie-experimenten worden onderzocht als tenminste een voorlopige oplossing is gevonden voor het probleem van de beoordeling van verworven inzicht. Op grond van deze

overwegingen besloot de werkgroep ook de didactiek voorlopig te laten rusten en alle aandacht te concentreren op het beoordelingsprobleem, de tweede kop van de draak — die op zichzelf formidabel genoeg leek om een afzonderlijke aanval te rechtvaardigen.

Betekenis van evaluatie-experimenten.

In dit stadium zal de lezer, die wèl de moeilijkheden van het wiskunde-onderwijs uit eigen ervaring kent, maar niet de mogelijkheden (en moeilijkheden) van de experimentatie in de psychologie, de didactiek en de paedagogiek, waarschijnlijk geneigd zijn sceptisch te reageren, op één van de volgende manieren: a) het lukt toch niet het over die inzicht-beoordeling eens te worden; b) het lukt toch niet een werkelijk objectief experiment op te zetten; c) als het al lukt, dan is de uitkomst van zo'n experiment toch niet bij machte mij van mijn systeem — waarvoor ik sterke argumenten heb — af te brengen. Op deze mogelijke reacties moet met een enkel woord over de betekenis van evaluatie-experimenten worden geantwoord.

Eerst punt b. De moeilijkheden, die zich voordoen bij de opzet van objectieve evaluatie-experimenten zijn inderdaad talrijk en groot — bv.: hoe (onder-)scheidt men experimenteel de invloed van de didactiek en van de persoon van de leraar? Op grond van ervaringen op andere gebieden kan voorlopig alleen gezegd worden, dat deze moeilijkheden niet ònoverkomelijk behoeven te zijn. Het is nu niet urgent dit met argumenten te staven; komt het tot concrete voorstellen op dit gebied, dan zullen die stellig op tafel worden gelegd en ter discussie worden gesteld.

Punt c sluit hierbij aan: wat kan de betekenis zijn van zulke experimenten? Om een experiment „scherp'' te maken, dus zo in te richten, dat de uitkomst duidelijke taal spreekt, is het vaak nodig de inhoud van het te onderzoeken verschijnsel sterk te beperken. Dit is een vrij algemene ervaring; op grond van die ervaring is van exacte evaluatie-experimenten in ieder geval niet te verwachten, dat zij met één slag de grote problemen van de didactiek of van de wiskunde-rijpheid zullen kunnen oplossen. Het is dan ook niet te verwachten, dat de uitkomsten ervan in staat zullen zijn iemand van zijn systeem af te brengen, als hij daar een overtuigd aanhanger van is; dat kan trouwens ook niet de bedoeling zijn. Naast de uitkomsten van mogelijke evaluatie-experimenten zijn er zó veel andere geldige argumenten — die voor een deel reeds in het veld gebracht zijn — voor (of tegen) bepaalde methoden, dat experimentele resultaten werkelijk niet zo maar tot beslissingen zullen kunnen leiden. Pas op den duur zullen zij aan praktische betekenis kunnen winnen,

namelijk tegen de tijd, dat er een netwerk van op elkaar aansluitende onderzoekingen is ontstaan. Zolang dit stadium niet is bereikt, zullen zij slechts een bescheiden maar in ieder geval objectieve *bijdrage* kunnen leveren *tot de probleemstelling*. Zij zullen kunnen helpen het denken over didactische en rijpheidsvraagstukken te verhelderen.

Wat punt a betreft (zal het lukken het eens te worden over de inzicht-beoordeling?), deze vraag komt in verband met de opzet van het project nog nader aan de orde. Op deze plaats slechts twee opmerkingen. Ten eerste: deze vraag hangt samen met de hele *doelstelling van het wiskunde-onderwijs:* Wat willen wij eigenlijk ermee bereiken? Dit is een zó fundamentele vraag, dat het belang van een poging het daarover eens te worden moeilijk kan worden overschat. Ten tweede: of het zal lukken een zekere overeenstemming te bereiken is afhankelijk van de actieve deelname van de groep der deskundigen, i.c. de wiskunde-leraren, aan het project. De psycholoog of didacticus kan weliswaar zekere algemene inzichten over „inzicht" inbrengen en zijn technische kunnen met betrekking tot (inzicht-) metings- en test-technieken ter beschikking stellen; de inhoud echter van de vragen, die het inzicht zullen moeten toetsen, zal door de wiskunde-docenten moeten worden bepaald.

Beoordeling van inzicht.

Het probleem waar wij hier voor staan, nl. de ontwikkeling van een voor de vak-deskundigen aanvaardbaar instrument voor de objectieve toetsing van verworven inzicht in een nader te bepalen vak- (en leerstof-) gebied, wordt vaak verkeerd gesteld. Men zegt dan namelijk: „Dan zul je eerst moeten weten, wat je onder inzicht verstaat" — en er volgt een discussie op verbaal-psychologisch vlak, waarbij weer allerlei verschillende opvattingen en theorieën aan bod komen. Zouden wij het probleem zó aanpakken, dan zou het stellig onoplosbaar blijken.

Het is echter volstrekt niet nodig het eens te zijn over wat onder inzicht-in-het-algemeen wordt verstaan in de vorm van *een formulering*, waarop wij ons allen kunnen verenigen. Het gaat er alleen om een redelijk bruikbare „operationele definitie" van inzicht-in-de-stof-in-kwestie op te stellen — in de vorm van een gedifferentiëerde reeks van objectief te beoordelen test-opgaven. Deze reeks van opgaven, in principe dus reeds de „inzicht-test",[2]) moet

---

[2]) De empirisch-statistische bewerking, die noodzakelijk is om van een dergelijke reeks opgaven een *test* te maken, die test-technisch aan de eisen voldoet, wordt hier buiten beschouwing gelaten.

zodanig zijn samengesteld, dat al datgene, wat verschillende deskundigen verstaan onder „inzicht", of liever gezegd, onder *opgaven* van het type waarin verworven inzicht wordt getoetst, erin tot zijn recht komt. Aangezien iedere docent in zijn dagelijkse practijk telkens weer een oplossing moet trachten te vinden voor de toetsing en beoordeling van de mate van begrip, die zijn leerlingen hebben verworven, moet het in principe mogelijk zijn in samenwerking een reeks opgaven op te stellen, die aan deze eisen voldoen. De testserie zal allereerst om zo te zeggen de G.G.D. van de verschillende inzicht-opvattingen moeten representeren; en, indien die G.G.D. te klein mocht blijken om een bruikbare test mee te construeren, moeten worden aangevuld met minder algemeen-representatieve opgaven, die tezamen het K.G.V. benaderen. Het is zeer wel denkbaar, dat de test zal moeten bestaan uit een aantal subtests, die b.v. elk een bepaald type opgaven bevatten, dat correspondeert met een bepaalde opvatting van „inzicht" en daarmee misschien van didactiek. Een gemakkelijke taak zal de constructie van een dergelijke test zeker niet zijn, te minder daar ook de wijze van vraagstelling aan de eisen van efficiency en objectieve scoorbaarheid zal moeten voldoen — dit laatste voor rekening van de testtechnici. Als het echter een gemakkelijke opgave was, zou het ook niet de moeite waard zijn er een afzonderlijk research project aan te wijden.

De keuze van de stof.

De werkgroep heeft na ampele overweging besloten als vak te kiezen *de meetkunde* en als stof, waaromtrent het verworven inzicht zal moeten worden getoetst, datgene, wat gewoonlijk in *het eerste jaar* van het V.H.M.O. wordt behandeld.

Deze keuze is stellig niet de eenvoudigste. Een algebra-inzicht-test zou waarschijnlijk gemakkelijker op te stellen zijn, en wat de meetkunde betreft zijn er test-technisch zeker gemakkelijker bewerkbare sectoren te vinden. De belangrijkste overweging bij de keuze is geweest, dat juist over deze stof veel te doen is, óók in verband met het rijpheidsprobleem. Het is, zeker als een meer traditionele didactiek wordt gevolgd, het meest typisch „wiskundige", waarmee de jonge leerlingen worden geconfronteerd en in zoverre uit een oogpunt van rijpheid het meest problematische. Juist hierover bestaan zeer verschillende didactische opvattingen; dat maakt de opgave een inzicht-test te construeren moeilijk — en aantrekkelijk.

Hebben wij het ons door deze keuze tè moeilijk gemaakt?

Het heeft, dunkt me, weinig zin hierover te filosoferen alvorens

het te proberen. Een feit is in ieder geval, dat in de U.S.A. ook voor deze sector van de leerstof talrijke „achievement tests" bestaan, die weliswaar aan Amerikaanse opvattingen zijn aangepast en dus zeker niet kunnen worden gecopiëerd, maar toch ons vertrouwen in de mogelijkheid om ook voor ons land iets bruikbaars te produceren kunnen schragen.

Het is uiteraard onmogelijk te garanderen, dat de wiskunde-docenten van alle didactische richtingen met het resultaat van ons werk gelukkig zullen zijn. Wij zullen doen wat wij kunnen. Persoonlijk meen ik, dat het mogelijk moet zijn, mèt de medewerking van de wiskunde-docenten, die wij zeer nodig hebben en waarop ik gaarne nogmaals een beroep doe, een instrument te maken, dat voor evaluatie-doeleinden redelijk bruikbaar zal zijn.

Hulpmiddel voor research; géén didactische uniformering.

Tot slot zij er, ter vermijding van misverstanden nog eens op gewezen, dat de doelstelling alléén is een hulpmiddel voor voortgezette research te construeren. Als de test er is, zal hij uitsluitend voor dit doel worden gebruikt. De zo gezonde beweging in de didactiek van het aanvankelijke meetkunde-onderwijs zal er o.i. eerder door worden gestimuleerd, dan dat zij ook maar zou kùnnen worden „stilgelegd". Ik kan niet zien, hoe enige didactische richting door de constructie van de test in haar streven zou kunnen worden belemmerd; wel zie ik de mogelijkheid, dat men in de didactische discussie op een enkel punt iets meer houvast krijgt.

Het was de werkgroep uiteraard niet onbekend, dat de „stof van de eerste klasse" niet in alle didactische systemen dezelfde is. In sommige systemen — b.v. dat van de van Hiele's — wordt zelfs maar zéér weinig van de traditionele stof in de eerste klasse behandeld. Dit is echter in genen dele een bezwaar: de hoofdzaken van de „eerste klassestof" worden in die systemen immers op een ander tijdstip behandeld. Als de veronderstelling, die aan zulke systemen ten grondslag ligt, juist is, nl. dat de leerlingen in de eerste klasse niet rijp zijn voor deze stof, in een later stadium van ontwikkeling echter wel, dan zal dit b.v. moeten kunnen blijken uit het feit, dat de stof sneller en/of beter wordt verwerkt op een latere leeftijd. Wil men dit bewijs experimenteel leveren, dat kan eventueel ook hiervoor de test, of bepaalde onderdelen daarvan, goede diensten bewijzen.

Amsterdam, Roemer Visscherstraat 11.